دبیرستان شایستگان نور
(دوره دوم)

پاسخنامه

دفترچه سؤالات (سری A)

مسابقه ریاضی دانان جوان

۰۲۱۸۸۷61968

shayesteganenoor2

۱۸ رتبه برتر گروه ریاضی فیزیک

دبیرستان غیر دولتی شایستگان نور (دوره دوم)

سارا کمایستانی
دانشگاه علم و صنعت
مهندسی برق

یاسمن فرخ
دانشگاه امیرکبیر
مهندسی پزشکی

مهدیه صفاری
دانشگاه تهران
مهندسی عمران

هلیا طهماسبی
دانشگاه شهید بهشتی
مهندسی صنایع

فرانک باسمچی
دانشگاه صنعتی شریف
مهندسی متالوژی

آتنا بدری
دانشگاه صنعتی اصفهان
مهندسی نفت

بهار شکوهی فر
دانشگاه خوارزمی
ریاضیات و کاربردها

یگانه مدیر روستا
دانشگاه امیرکبیر
مهندسی نساجی

فاطمه سادات مدنی
دانشگاه خوارزمی
مهندسی شهرسازی

غزاله صالحی
دانشگاه امیرکبیر
مهندسی نساجی

آنوشا عابدی
دانشگاه قم
مهندسی مکانیک

نیلوفر زرشناس
دانشگاه صنعتی همدان
مهندسی شیمی

بهاره محی الدین
دانشگاه تبریز
مهندسی متالوژی

سوگند مرآثی
دانشگاه بین المللی قزوین
مهندسی برق

ملنا علوی نصر
دانشگاه سمنان
مهندسی مکانیک

زهرا رزازان
دانشگاه سمنان
مهندسی معماری

شقایق محمدیان
دانشگاه سمنان
مهندسی معماری

الهام شاملو
دانشگاه شاهد
مهندسی عمران

فرزندان شما شایسته بهترین ها هستند

۱۳ رتبه برتر گروه علوم تجربی

دبیرستان غیر دولتی شایستگان نور (دوره دوم)

ساره عزتی پور
رتبه ۳۷۱

راما عارفی
دانشگاه تهران
مهندسی ژنتیک

صبا اله وردی
دانشگاه تهران
پزشکی

ساناز کشاورز
دانشگاه رشت
پزشکی

صبا لطفعلی
دانشگاه تهران
پرستاری

نیلوفر حیدریان
دانشگاه الزهرا
شیمی کاربردی

عسل محمدی
دانشگاه تهران
میکروبیولوژی

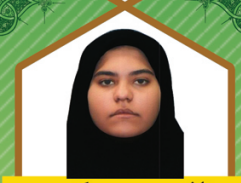
مژگان احمدی
دانشگاه تبریز
داروسازی

کیمیا پیرخواه کهن
دانشگاه علوم دارویی تهران
مامائی

دریا دژپور
دانشگاه شیراز
داروسازی

مینا حقیقت نیا
دانشگاه سمنان
زیست شناسی سلولی مولکولی

یگانه جعفری
علوم پزشکی تهران
میکروبیولوژی



حنانه سیروس کبیری
دانشگاه شهید بهشتی
زبان

فرزندان شما شایسته بهترین ها هستند

۱۵ رتبه برتر گروه علوم انسانی

دبیرستان غیر دولتی شایستگان نور (دوره دوم)

مهشید مؤمنی
دانشگاه علامه طباطبایی
اقتصاد

آتنا مطاعی
دانشگاه تهران
روانشناسی

مونا کریمی
دانشگاه خوارزمی
حقوق

شیدا قیاسوند
دانشگاه تهران
جامعه شناسی

مبینا خسروبیگی
دانشگاه خوارزمی
حسابداری

هانیه صادقی
دانشگاه تهران
تاریخ

نازنین قیاسون
دانشگاه علامه طباطبائی
آمار

حانیه بخشی نژاد
دانشگاه الزهرا
حسابداری

طوبی فاطمی
دانشگاه تهران
مدیریت بازرگانی

رها خادم موسوی
دانشگاه تهران
باستان شناسی

سپیده بابائیان
دانشگاه علامه طباطبائی
آمار

ساجده فرجی
دانشگاه خوارزمی
جامعه شناسی

محدثه ایمانی
دانشگاه تهران
تاریخ

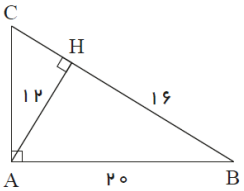
مهلا مطلبی
دانشگاه فرهنگیان
آموزش ابتدایی

مارال دارچینی
دانشگاه سمنان
روانشناسی

فرزندان شما شایسته بهترین ها هستند

۱ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس BH را به دست می‌آوریم:

$$BH^۲ = ۲۰^۲ - ۱۲^۲ \to BH^۲ = ۴۰۰ - ۱۴۴ = ۲۵۶ \to BH = \sqrt{۲۵۶} = ۱۶$$



$$\left.\begin{matrix}\hat{B} = \hat{B} \\ \hat{H} = \hat{A} = ۹۰\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\frac{AH}{CA} = \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} \to \frac{۱۲}{CA} = \frac{۲۰}{CB} = \frac{۱۶}{۲۰}$$

$$\frac{۱۲}{CA} = \frac{۱۶}{۲۰} \to AC = \frac{۱۲ \times ۲۰}{۱۶} = \frac{۲۴۰}{۱۶} = ۱۵$$

۲ ۱ ۲ **۳** ۴ تعداد همهٔ حالت‌های ممکن در پرتاب دو تاس برابر است با: $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$ و تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۱۰ باشد برابر است با:

$$A = \{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

۳ ۱ ۲ ۳ **۴** نکته: اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل r عضو باشد و شامل q عضو نباشد، از رابطهٔ ۲^{n-r-q} به‌دست می‌آید.

در این سؤال مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است، حال تعداد زیرمجموعه‌هایی که عضو a را داشته باشند، ولی عضو b را نداشته باشند. (شامل یک عضو a باشد و شامل یک عضو b نباشد):

$$۲^{۶-۱-۱} = ۲^۴ = ۱۶$$

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا مجموعهٔ B را با اعضایش نمایش می‌دهیم:

$$B = \{۲x + ۳ \,|\, x \in \mathbb{N} \;,\; x < ۵\} = \{۵, ۷, ۹, ۱۱\}$$

$$A \cap B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\} \cap \{۵, ۷, ۹, ۱۱\} = \{۵, ۷, ۹\}$$

$A \cap B$ سه عضو دارد و زیرمجموعه‌های یک عضوی آن برابر ۳ تا است.

$$\{۵\} \;,\; \{۷\} \;,\; \{۹\}$$

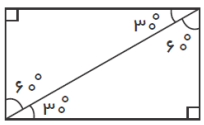
۵ ۱ ۲ ۳ **۴** چون $۸۱ = (۱۰-۱)^۲$ و $۱۲۱ = (۱۰+۱)^۲$ فقط nهایی در شرط مسئله صدق می‌کنند که $۸۲ \le n \le ۱۲۰$ تعداد این عددها برابر است با:

$$۱۲۰ - ۸۲ + ۱ = ۳۹$$

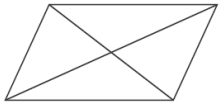
۶ ۱ ۲ ۳ **۴** بررسی گزینه‌ها:

برای گزینه‌های ۱ تا ۳ مثال نقض می‌زنیم:

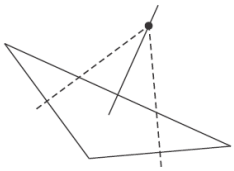
گزینهٔ ۱: قطر نیمساز نیست زیرا زاویه را به دو زاویهٔ برابر تقسیم نکرده است.



گزینهٔ ۲: یکی از قطرها از دیگری کوچک‌تر است.



گزینهٔ ۳: محل برخورد عمودمنصف‌ها بیرون مثلث قرار دارد و همیشه درون مثلث قرار نمی‌گیرد.



۷ **۱** ۲ ۳ ۴ $\sqrt{۴۳}$ عددی گنگ است، پس $x \in R$ یا $x \in Q'$ است. با توجه به گزینه‌ها پس $x \in R$ (رد گزینهٔ ۳ و ۴)

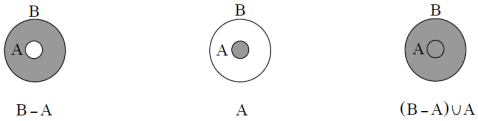
اما $\sqrt{۴۳}$ بین $\sqrt{۴۹}$ و $\sqrt{۳۶}$ قرار دارد که جذر آنها برابر با اعداد صحیح ۷ و ۶ است. پس گزینهٔ «۲» درست است.

۸ ۱ **۲** ۳ ۴ و با توجه به نمودار ون:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \quad (۱)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing \quad (۲)$$

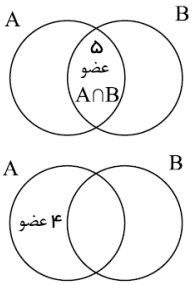
$$\Rightarrow [(A-B)] \cup (B-A) \cup (A \cap B) \xrightarrow{(۱),(۲)} \varnothing \cup (B-A) \cup A$$



$$\varnothing \cup (B-A) \cup A = \varnothing \cup B = B$$

دبیرستان شایستگان نور
(دوره دوم)

۹ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به نمودار ون، تعداد عضوهای هر قسمت را داخل آن قرار می‌دهیم.



درنتیجه، در قسمت $n(B-A)$ باید ۳ عضو داشته باشیم، چون:

$$n(A\cup B)=۱۲$$

روش دوم:

با توجّه به رابطه داریم:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow ۱۲=۴+n(B-A)+۵\Rightarrow n(B-A)=۳$$

۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴ مجموعه‌های متناظر با هر گزینه را می‌نویسیم:

گزینهٔ (۱): $\{۲,۳\}$

گزینهٔ (۲): $\{۱,۳,۵\}$

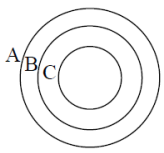
گزینهٔ (۳): $\{۹,۱۸,۲۷,\dots\}$

گزینهٔ (۴): $\{۳,۶,۹,\dots\}$

بنابراین فقط در گزینهٔ (۳) عدد ۳، عضو مجموعه داده شده نیست.

۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴ چون عدد گزینهٔ ۱ بین صفر و یک هست پس هرچه توان بیشتر باشد کوچک‌تر است (رد گزینهٔ ۱) $۶^{-۲}=\frac{۱}{۳۶}$ که با $-\frac{۲}{۶}$ برابر نیست (رد گزینهٔ ۲). جواب رادیکال هیچ‌گاه منفی نمی‌شود (رد گزینهٔ ۴) پس تنها گزینهٔ ۳ صحیح است.

۱۲ **۱** ۲ ۳ ۴ چون سه مجموعهٔ A و B,C به‌صورت $C\subseteq B\subseteq A$ است، پس نمودار ون آن به صورت زیر است:



$$\begin{matrix}B\cup A=A\\A\cup C=A\end{matrix}\rightarrow A\cap A=A$$

۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجّه به $۲^{-۲y}=۲^{۳x}\times ۲$ داریم:

$$۲^{۳x}\times ۲^{-۲y}=۲\Rightarrow ۲^{۳x-۲y}=۲\Rightarrow ۳x-۲y=۱$$

همچنین از رابطهٔ $۳^{۵y}\div ۳^{۴x}=۳$ داریم:

$$۳^{۵y}\div ۳^{۴x}=۳^{۱}\Rightarrow ۳^{۵y-۴x}=۳\Rightarrow ۵y-۴x=۱$$

حال با حل دستگاه مربوط به دو معادله داریم:

$$\begin{matrix}\times ۴\\\times ۳\end{matrix}\begin{cases}۳x-۲y=۱\\-۴x+۵y=۱\end{cases}\Rightarrow +\begin{cases}۱۲x-۸y=۴\\-۱۲x+۱۵y=۳\end{cases}$$
$$y=۱$$

$$۳x-۲y=۱\overset{y=۱}{\Rightarrow}۳x=۳\Rightarrow x=۱$$
$$۲x-y=۲\times ۱-۱=۱$$

۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴ عبارت $۲x-۴$ می‌تواند هم ۳ باشد و هم -۳ پس این دو را حل می‌کنیم:

$$۲x-۴=۳\ \Rightarrow\ x=\frac{۷}{۲}$$
$$۲x-۴=-۳\ \Rightarrow\ x=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow\ \frac{۷}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ حالت‌های ممکن را برای a و b در نظر می‌گیریم $b<۱۳,\ b\in N \Rightarrow ۱\le b\le ۱۲$

$\to b=۱ \Rightarrow \frac{a}{b}<۱$ صفر حالت

$\to b=۲ \Rightarrow \frac{a}{b}<۱$ $a=۱$ یک حالت

$\to b=۳ \Rightarrow \frac{a}{b}<۱$ $a=۱,۲$ دو حالت

$\vdots$

$\to b=۱۲ \Rightarrow \frac{a}{b}<۱$ $a=۱,۲,۳,۴,\cdots,۱۱$ ۱۱ حالت

$\to$ تعداد کل حالت‌ها $=۱+۲+\cdots+۱۱=\frac{۱۱(۱۲)}{۲}=۶۶$

در میان این کسرهای نوشته شده، برخی از کسرها با هم مساوی هستند آنها را به‌دست می‌آوریم:

۱ تکراری $\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{۱۰}$

۳ تکراری $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}$

۱ تکراری $\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$

۲ تکراری $\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}=\frac{۹}{۱۲}$

۱ تکراری $\frac{۵}{۶}=\frac{۱۰}{۱۲}$

۵ تا تکراری $\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{۸}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۶}{۱۲}$

۳ تا تکراری $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{۹}=\frac{۴}{۱۲}$

۲ تا تکراری $\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۱۲}$

۱ تکراری $\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۰}$

۱ تکراری $\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۱۲}$

۱ تکراری $\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}$

مجموعاً $۱+۱+۱+۲+۱+۳+۱+۱+۲+۳+۴+۵=۲۱$

$۶۶-۲۱=۴۵$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{۲۴}{۱۷}<\frac{x}{۱۲}\xrightarrow{\times ۱۲}\frac{۲۸۸}{۱۷}<x$$

حاصل $\frac{۲۸۸}{۱۷}$ را به دست می‌آوریم که برابر است با $۱۶/۹۴$ پس: $۱۶/۹۴<x$ و چون $x\in N$ است پس حداقل مقدار x برابر ۱۷ است.

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به اینکه $(A-B)\cup(A\cap B)=A$ در نتیجه گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح این سوال است.

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: جذر اعداد بین ۰ و ۱ از خودشان بزرگ‌تر است.

طبق نکتهٔ بالا جذر $۰/۱۹$ از خودش بزرگ‌تر است.

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ روش هر دو درست است. چون در صورت سوال گفته که $\sqrt{۱۸a^۳b^۸}$ عدد حقیقی است و چون عبارت $b^۸$ نامنفی است پس قطعاً a باید نامنفی باشد، بنابراین وجود قدرمطلق تأثیری در جواب ندارد، بنابراین روش علی و مهدی درست است.

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ چون دو مثلث متشابه‌اند، پس نسبت اضلاع متناظر آنها با هم برابر است.

پس داریم:

$$\frac{۸}{Y-۱}=\frac{۱۰}{۵}=\frac{۱۶}{X+۳}$$

$$\frac{۸}{Y-۱}=\frac{۱۰}{۵}\Rightarrow ۱۰Y-۱۰=۴۰\Rightarrow ۱۰Y=۵۰\Rightarrow Y=۵\ ,\ \frac{۱۰}{۵}=\frac{۱۶}{X+۳}$$

$$\Rightarrow ۱۰X+۳۰=۸۰\Rightarrow ۱۰X=۵۰\Rightarrow Y=۵\ ,\ X=۵$$

$X=Y=۵$ پس باهم برابرند $\Leftarrow$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا باتوجه به رابطهٔ $\sqrt{a^۲}=|a|$ عبارت‌های زیررادیکال را خارج می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x^۲y}-\sqrt{x^۲y^۳}}{x\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x^۲}\sqrt{y}-\sqrt{x^۲y^۲}\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}=\frac{|x|\sqrt{y}-|xy|\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

حال با توجه به اینکه $x<۰<y$ (x مقادیر منفی و y مقادیر مثبت دارد) آنها را بدون نماد قدر مطلق می‌نویسیم:

$$\frac{-x\sqrt{y}-(-(xy))\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}=\frac{-x\sqrt{y}+xy\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}=\frac{-x\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}+\frac{xy\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

$$=-۱+y=y-۱$$

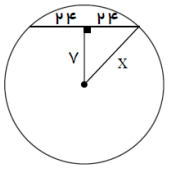
دبیرستان شایستگان نور
(دوره دوم)

۲۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{|a-b|}{b-a}=\frac{a-b}{-(a-b)}=-۱$$

۲۳ ۱ ۲ **۳** ۴

در دایره شعاع عمود بر وتر، منصف آن نیز هست، اکنون با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ایجاد شده شعاع را به دست می‌آوریم:



$۴۸ \div ۲ = ۲۴$

$x^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲ \Rightarrow x^۲ = ۵۷۶ + ۴۹ = ۶۲۵ \Rightarrow x = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵$ شعاع

قطر $= ۲ \times$ شعاع $= ۲ \times ۲۵ = ۵۰$

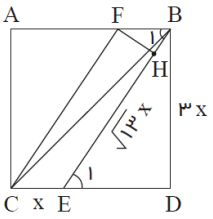
۲۴ ۱ **۲** ۳ ۴ کافی است نسبت اضلاع آنها را به دست آوریم:

$$\frac{ABCD \text{ طول}}{MBCF \text{ طول}}=\frac{ABCD \text{ عرض}}{MDCF \text{ عرض}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۸}{۶}=\frac{۶}{FC} \Rightarrow \boxed{FC=۲}$$

۲۵ ۱ **۲** ۳ ۴

اگر $ED = x$ در نظر بگیریم آنگاه:



$$S_{BED} = ۲S_{BCE} \xrightarrow[\text{را } BD \text{ میگیریم}]{\text{ارتفاع هر دو مثلث}} \frac{ED \times BD}{۲} = ۲ \times \frac{CE \times BD}{۲} \rightarrow ED = ۲CE$$

$$ED = ۲x \quad \text{و} \quad \begin{cases} DC = ۳x \\ BD = DC = ۳x \end{cases} \Rightarrow BE^۲ = (۲x)^۲ + (۳x)^۲ \rightarrow BE^۲ = ۴x^۲ + ۹x^۲ = ۱۳x^۲ \rightarrow BE = \sqrt{۱۳}x$$

چون BE خط مورب می‌باشد. $\left.\begin{matrix} \hat{B}_۱ = \hat{E}_۱ \\ \hat{H} = \hat{D} \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{دو زاویه}]{zz} \overset{\Delta}{FBH} \approx \overset{\Delta}{BDE}$

$$\frac{FB}{BE}=\frac{FH}{BD} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۱۳}x}=\frac{۱}{۳x} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۱}{۳x} \Rightarrow ۳x=\sqrt{۱۳} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

$$\text{طول ضلع مربع} = ۳x = ۳ \times \frac{\sqrt{۱۳}}{۳} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = \sqrt{۱۳}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S = (\text{یک ضلع})^۲ = (\sqrt{۱۳})^۲ = ۱۳$$

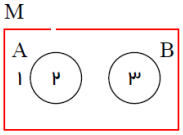
۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم، یعنی ۸ تا آبی، ۶ تا سبز و ۹ تا زرد و ۹ تا قرمز برداریم. یاقوت بعدی یا قرمز یا زرد است که از آن رنگ ۱۰ تا برداشته می‌شود:

$$۶ + ۸ + ۹ + ۹ + ۱ = ۳۳$$

۲۷ ۱ **۲** ۳ ۴ چون شش‌ضلعی منتظم است تمام اضلاع برابر است، پس باید اضلاع مثلث اولیه به سه قسمت برابر تقسیم شوند. بنابراین داریم:

$$x = ۱۰ \div ۳ = \frac{۱۰}{۳} = ۳\frac{۱}{۳}$$

۲۸ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا به کمک نمودار ون ناحیه‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم:



گزینهٔ (۱) : $\begin{cases} A = \{۲\} \\ B' = \{۱, ۲\} \end{cases} \Rightarrow A \subseteq B'$

همان‌طور که در نمودار ون کشیده شده مشخص است، گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند.

۲۹ **۱** ۲ ۳ ۴ بلندترین ارتفاع، ارتفاع دارد بر کوچکترین ضلع است به‌شکل زیر توجه کنید. با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث برای دو مثلث ABH و ACH داریم:

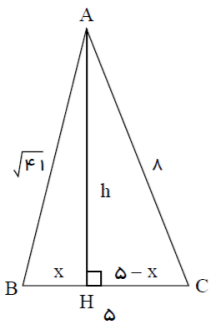
$$AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = AC^۲ - CH^۲$$

$$\sqrt{(۴۱^۲)^۲} - x^۲ = (۸)^۲ - \underbrace{(۵-x)^۲}_{(۵-x)(۵-x)}$$

$$۴۱ - x^۲ = ۶۴ - (۲۵ - ۱۰x + x^۲)$$

$$۴۱ - \cancel{x^۲} = \underbrace{۶۴ - ۲۵}_{۳۹} + ۱۰x - \cancel{x^۲}$$

$$۲ = ۱۰x \rightarrow \boxed{x = ۰/۲}$$



$$h^۲ = (\sqrt{۴۱})^۲ - x^۲ = ۴۱ - (۰/۲)^۲ = ۴۱ - \frac{۴}{۱۰۰} = ۴۰/۹۶ \rightarrow h = ۶/۴$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ قضیهٔ حمار: در هر مثلث مجموع اندازه‌های دو ضلع مثلث از اندازه ضلع سوم مثلث بیشتر است.

طبق قضیهٔ حمار مجموع دو ضلع $۳a$ و $۲a$ برابر است با $۵a$ و از ضلع سوم بزرگ‌تر نیست برابر است، پس با $۲a$ ، $۳a$ و $۵a$ نمی‌توان مثلث ساخت.

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ نسبت جرم اتم هیدروژن به جرم یک الکترون را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم یک اتم هیدروژن}}{\text{جرم یک الکترون}} = \frac{۱/۷ \times ۱۰^{-۲۴}}{۹/۱ \times ۱۰^{-۲۸}} =$$

$$\frac{۱۷ \times ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{-۲۴}}{۹۱ \times ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{-۲۸}} = \frac{۱۷ \times ۱۰^{-۲۵}}{۹۱ \times ۱۰^{-۲۹}} =$$

$$\frac{۱۷ \times ۱۰^{-۲۵} \times ۱۰^{۲۹}}{۹۱} = (\frac{۱۷}{۹۱}) \times ۱۰^۴ \simeq ۰/۱۸۷ \times ۱۰^۴$$

$$= ۱/۸۷ \times ۱۰^{-۱} \times ۱۰^۴ = ۱/۸۷ \times ۱۰^۳$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ باتوجّه به تشابه دو مثلث ABC و ADE داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱+x-۱} = \frac{x-۱}{x+۳} \Rightarrow \frac{x-۱}{۲x} = \frac{x-۱}{x+۳}$$

$$\Rightarrow ۲x = x + ۳ \Rightarrow x = ۳$$

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴ $a < ۰$ و $ab > ۰$ در این صورت نتیجه می‌گیریم که $b < ۰$ است:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(a+b)^۲}}{a+b} = \frac{|a+b|}{a+b} \underset{a+b<۰}{=\!=\!=} \frac{-(a+b)}{a+b} = -۱$$

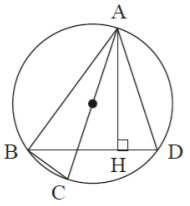
۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴ با تقسیم فاصلهٔ زمین تا خورشید بر سرعت نور، مدت زمان طی کردن آن به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱۵ \times ۱۰^{۱۰}}{۳ \times ۱۰^۸} = x \Rightarrow ۵ \times ۱۰^۲ = ۵۰۰ \text{ ثانیه}$$

ثانیه	دقیقه
۶۰	۱
۵۰۰	x

$\Rightarrow ۸/۳$ دقیقه

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\left.\begin{matrix}\hat{H} = \hat{B} = ۹۰ \\ \hat{C} = \hat{D}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AHD} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{HD}{BC} \rightarrow \frac{۱۰}{AC} = \frac{۸}{۱۲} \rightarrow AC = \frac{۱۰ \times ۱۲}{۸} = ۱۵ \text{ قطر}$$

$$\text{شعاع} = ۱۵ \div ۲ = ۷/۵$$

۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر طرفین یک نامعادله در عددی منفی ضرب شود جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$۱ = \sqrt{۱} < \sqrt{۲} < \sqrt{۴} = ۲$$

$$-۲ < -\sqrt{۲} < -۱$$

$$-۳ < -۱ - \sqrt{۲} < -۲$$

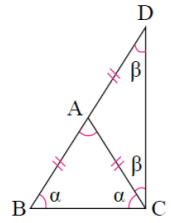
۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$۲\sqrt{۸}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۳۲}, \sqrt{۲۵}<\sqrt{۳۲}<\sqrt{۳۶}\Rightarrow ۵<\sqrt{۳۲}<۶\Rightarrow ۶<۱+\sqrt{۳۲}<۷$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به‌شکل در مثلث جدید (DBC) : $AC=AD\Rightarrow A\hat{D}C=A\hat{C}D=\beta$، حال به روابط زیر توجه کنید:

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است داریم:

$a+\beta+(a+\beta)=۱۸۰^\circ\Rightarrow \underline{a+\beta=۹۰^\circ}$



۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴ حاصل‌ضرب ۱ تا ۲۸ را باید به شکل ضرب اعداد با توان‌های زوج بنویسیم. راه ساده‌تر آنکه با ضرب اعداد مناسب، توان‌های زوج بسازیم و کنار بگذاریم.

$۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times ۲۸=۱\times \cancel{۲}\times ۳\times ۴\times\cdots\times \cancel{۱۴}\times\cdots\times \cancel{۲۸}$

مجذور کامل‌ها را کنار هم می‌گذاریم؛ مثل ۱ ، ۴ ، ۹ ، ....

اگر اعداد ۷ × ۳ را هم در ۲۱ ضرب کنیم، $۲۱^۲$ به‌دست می‌آید که کنار هم می‌گذاریم، ۵ × ۴ هم در ۲۰ کنار می‌رود و می‌ماند اعداد زیر:

$۶\times ۸\times ۱۰\times ۱۱\times ۱۲\times ۱۳\times ۱۵\times ۱۷\times ۱۸\times ۱۹\times ۲۲\times ۲۳\times ۲۴\times ۲۶\times ۲۷$

عدد ۶ به شکل ۳ × ۲ است که با ۱۸ × ۲۷ مجذور کامل می‌شوند. مجذور کامل = ۸۱ × ۳۶ × ۳ × ۲۷ × ۱۸ × ۳ × ۲ بقیه را همچنین می‌نویسیم:

$(۴\times ۲)\times(۲\times ۵)\times ۱۱\times(۴\times ۳)\times ۱۳\times(۵\times ۳)\times ۱۷\times ۱۹\times(۲\times ۱۱)\times ۲۳\times(۴\times ۲\times ۳)\times ۲\times ۱۳=$

$۲^{۱۱}\times ۳^۳\times ۱۱^۲\times ۱۳^۲\times ۱۷\times ۱۹\times ۲۳$

$۲, ۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳$

پس آنهایی که باقی‌مانده است.

اگر این ۵ عدد حذف شوند، حاصل‌ضرب بقیه مجذور کامل می‌شود.

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$۲^n=۱۰۰\ ,\ ۱۶^n=(۲^۴)^n=(۲^n)^۴\Rightarrow\sqrt{۱۶^n}=(۲^n)^۲=۱۰۰\times ۱۰۰=۱۰۰۰۰\ (۱)$

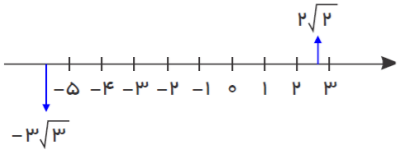
$۲^{-n+۳}=۲^{-n}\times ۲^۳=\frac{۱}{۲^n}\times ۸=\frac{۸}{۱۰۰}\ (۲)$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{۱۶^n}}{۲^{-n+۳}}\overset{(۱),(۲)}{=}\frac{۱۰۰۰۰}{\frac{۸}{۱۰۰}}=\frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۸}=۱/۲۵\times ۱۰^۵$

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا محل تقریبی قرار گرفتن دو عدد $۲\sqrt{۲}$ و $-۳\sqrt{۳}$ را مشخّص می‌کنیم.

$۲\sqrt{۲}\simeq ۲\times ۱/۴=۲/۸$

$-۳\sqrt{۳}\simeq ۳\times(-۱/۷)=-۵/۱$



بررسی جمله‌ها:

الف) نادرست است. چون نقاط رنگ شده تشکیل یک پاره‌خط نمی‌دهند، چون اعداد گویا مابین آن‌ها رنگ نشده است.

ب) درست است. تعداد اعداد گنگ بین $۲\sqrt{۲}$ و $-۳\sqrt{۳}$ بی‌شمار است.

ج) درست است. تعداد اعداد گویا بین دو عدد متمایز بی‌شمار است.

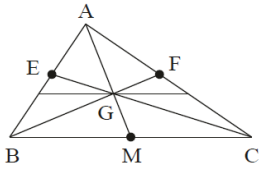
د) نادرست است. چون اعداد اعشاری نامختوم جزء اعداد گویا هستند و دارای بی‌شمار رقم اعشاری هستند ولی گنگ نیستند.

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴ حاصل‌ضرب دو عدد را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$۲۰^{۵۰}\times ۵۰^{۲۰}=(۲^۲\times ۵)^{۵۰}\times(۲\times ۵^۲)^{۲۰}=۲^{۱۰۰}\times ۵^{۵۰}\times ۲^{۲۰}\times ۵^{۴۰}=۲^{۱۲۰}\times ۵^{۹۰}$

چون $۱۲۰>۹۰$ پس ۹۰ صفر در سمت راست خود دارد.

۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴ درهر مثلث میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.



$\frac{AG}{GM}=\frac{BG}{GF}=\frac{CG}{GE}=\frac{۲}{۱}$

$AM=AG+GM=۲+۱\Rightarrow\frac{AG}{AM}=\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow S_{AEF}=(\frac{۲}{۳})^۲ S_{ABC}=\frac{۴}{۹}ABC\Rightarrow S_{EFCD}=\frac{۵}{۹}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{EFCB}}=\frac{۴}{۵}$

دبیرستان شایستگان نور
(دوره دوم)

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا برای سادگی بیشتر، هر ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. طبق تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{BMN}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$\frac{MN}{AC}=\frac{BM}{AB}\rightarrow\frac{a}{AC}=\frac{BM}{AB}\rightarrow a=\frac{BM\times AC}{AB}$$ رابطه‌ی (۱)

طبق تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{NEC}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$\frac{NE}{AB}=\frac{EC}{AC}\rightarrow\frac{a}{AB}=\frac{EC}{AC}\rightarrow\frac{a}{AB}=\frac{EC}{AC}$$
$$\rightarrow a=\frac{AB\times EC}{AC}$$ رابطهٔ (۲)

رابطه‌ی (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم و به‌جای BM و EC معادل‌های آنها را جایگزین می‌کنیم:

$$a^2=\frac{BM\times \cancel{AC}}{\cancel{AB}}\times\frac{\cancel{AB}\times EC}{\cancel{AC}}=BM\times EC=(AB-a)(AC-a)$$

$$\rightarrow \cancel{a^2}=AB\times AC-AB\times a-AC\times a+\cancel{a^2}$$

$$AB\times AC-(AB+AC)a=0\rightarrow a=\frac{AB\times AC}{AB+AC}\rightarrow \text{مساحت مربع}=a^2=\left(\frac{AB\times AC}{AB+AC}\right)^2$$

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴ اعداد گویا و اعداد گنگ هیچ اشتراکی با هم ندارند. $Q\cap Q'=\varnothing$

پاسخ سؤالات تشریحی آزمون

۱ به الگوی زیر دقت کنید:

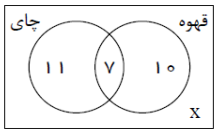
اعضای این مجموعه به صورت مجموعی از 2^{11} با اعداد زوج متوالی از ۲ تا 2^{11} هستند:

$$\left.\begin{array}{l}2^{11}+2=2^{11}+2\times 1\\2^{11}+4=2^{11}+2\times 2\\\vdots\\2^{12}=2^{11}+2^{11}=2^{11}+2\times 2^{10}\end{array}\right\}\rightarrow$$ پس 2^{10} تا عدد زوج با جمع شدن با 2^{11} این مجموعه را می‌سازند.

۲ با توجه به نمودار زیر داریم:

$18-7=11$: تعداد افرادی که فقط چای خورده‌اند.

$17-7=10$: تعداد افرادی که فقط قهوه خورده‌اند.



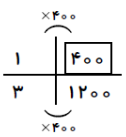
$x+11+7+10=30\rightarrow x=2$ پس ۲ نفر نه چای خورده‌اند و نه قهوه

۳ شمارنده‌های عدد ۲۵، اعداد ۱، ۵ و ۲۵ هستند، پس اگر بخواهیم احتمال آنکه عدد ظاهر شده شمارنده ۲۵ باشد، داریم:

(یکرقمی نیست.)

$$\text{احتمال}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

پس از هر ۳ بار پرتاب، انتظار داریم یکی از آن‌ها شمارنده ۲۵ باشد، در نتیجه داریم:



پس انتظار داریم، از ۱۲۰۰ پرتاب، ۴۰۰ بار، یکی از شمارنده‌های عدد ۲۵ ظاهر شود.

۴

$$\left.\begin{array}{l}DE\parallel FB\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{AD}{AF}=\frac{AE}{AB}\\FE\parallel BC\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}\end{array}\right\}\longrightarrow\frac{AD}{AF}\times\frac{AF}{AC}\longrightarrow AF^2=AD\times AC$$

۵ مجموع دو عدد نامنفی برابر صفر شده است پس هر کدام باید برابر صفر باشند.

$$(y-11)=0\rightarrow y=11\quad,\quad(x-7)=0\rightarrow x=7$$