دبیرستان شایستگان نور
(دوره دوم)

پاسخنامه

دفترچه سؤالات (سری B)

مسابقه ریاضی دانش‌آموزان جوان

۰۲۱۸۸۷۶۱۹۶۸
shayesteganenoor2

۱۸ رتبه برتر گروه ریاضی فیزیک

دبیرستان غیر دولتی شایستگان نور (دوره دوم)

فرانک باسمچی
دانشگاه صنعتی شریف
مهندسی متالوژی

هلیا طهماسبی
دانشگاه شهید بهشتی
مهندسی صنایع

مهدیه صفاری
دانشگاه تهران
مهندسی عمران

یاسمن فرخ
دانشگاه امیرکبیر
مهندسی پزشکی

سارا کمایستانی
دانشگاه علم و صنعت
مهندسی برق

غزاله صالحی
دانشگاه امیرکبیر
مهندسی نساجی

فاطمه سادات مدنی
دانشگاه خوارزمی
مهندسی شهرسازی

یگانه مدیر روستا
دانشگاه امیرکبیر
مهندسی نساجی

بهار شکوهی فر
دانشگاه خوارزمی
ریاضیات و کاربردها

آتنا بدری
دانشگاه صنعتی اصفهان
مهندسی نفت

ملنا علوی نصر
دانشگاه سمنان
مهندسی مکانیک

سوگند مرآثی
دانشگاه بین المللی قزوین
مهندسی برق

بهاره محی الدین
دانشگاه تبریز
مهندسی متالوژی

نیلوفر زرشناس
دانشگاه صنعتی همدان
مهندسی شیمی

آنوشا عابدی
دانشگاه قم
مهندسی مکانیک

الهام شاملو
دانشگاه شاهد
مهندسی عمران

شقایق محمدیان
دانشگاه سمنان
مهندسی معماری

زهرا رزازان
دانشگاه سمنان
مهندسی مهماری

فرزندان شما شایسته بهترین ها هستند

۱۲ رتبه برتر گروه علوم تجربی

دبیرستان غیر دولتی شایستگان نور (دوره دوم)

ساره عزتی پور
رتبه ۳۷۱

راما عارفی
دانشگاه تهران
مهندسی ژنتیک

صبا اله وردی
دانشگاه تهران
پزشکی

ساناز کشاورز
دانشگاه رشت
پزشکی

صبا لطفعلی
دانشگاه تهران
پرستاری

نیلوفر حیدریان
دانشگاه الزهرا
شیمی کاربردی

عسل محمدی
دانشگاه تهران
میکروبیولوژی

مژگان احمدی
دانشگاه تبریز
داروسازی

کیمیا پیرخواه کهن
دانشگاه علوم دارویی تهران
مامائی

دریا دژپور
دانشگاه شیراز
داروسازی

مینا حقیقت نیا
دانشگاه سمنان
زیست شناسی سلولی مولکولی

یگانه جعفری
علوم پزشکی تهران
میکروبیولوژی

حنانه سیروس کبیری
دانشگاه شهید بهشتی
زبان

فرزندان شما شایسته بهترین ها هستند

۱۵ رتبه برتر گروه علوم انسانی

دبیرستان غیر دولتی شایستگان نور (دوره دوم)

مهشید مؤمنی
دانشگاه علامه طباطبایی
اقتصاد

آتنا مطاعی
دانشگاه تهران
روانشناسی

مونا کریمی
دانشگاه خوارزمی
حقوق

شیدا قیاسوند
دانشگاه تهران
جامعه شناسی

مبینا خسروبیگی
دانشگاه خوارزمی
حسابداری

هانیه صادقی
دانشگاه تهران
تاریخ

نازنین قیاسون
دانشگاه علامه طباطبائی
آمار

حانیه بخشی نژاد
دانشگاه الزهرا
حسابداری

طوبی فاطمی
دانشگاه تهران
مدیریت بازرگانی

رها خادم موسوی
دانشگاه تهران
باستان شناسی

سپیده بابائیان
دانشگاه علامه طباطبائی
آمار

ساجده فرجی
دانشگاه خوارزمی
جامعه شناسی

محدثه ایمانی
دانشگاه تهران
تاریخ

مهلا مطلبی
دانشگاه فرهنگیان
آموزش ابتدایی

مارال دارچینی
دانشگاه سمنان
روانشناسی

فرزندان شما شایسته بهترین ها هستند

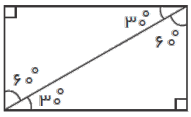
۱ ۱ ۲ ۳ **۴** چون $(۱۰-۱)^۲=۸۱$ و $(۱۰+۱)^۲=۱۲۱$ فقط nهایی در شرط مسئله صدق می‌کنند که $۸۲\le n\le ۱۲۰$ تعداد این عددها برابر است با:

$۱۲۰-۸۲+۱=۳۹$

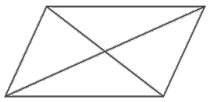
۲ ۱ ۲ ۳ **۴** بررسی گزینه‌ها:

برای گزینه‌های ۱ تا ۳ مثال نقض می‌زنیم:

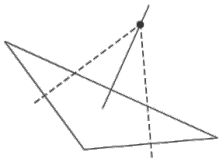
گزینهٔ ۱: قطر نیمساز نیست زیرا زاویه را به دو زاویهٔ برابر تقسیم نکرده است.



گزینهٔ ۲: یکی از قطرها از دیگری کوچک‌تر است.



گزینهٔ ۳: محل برخورد عمودمنصف‌ها بیرون مثلث قرار دارد و همیشه درون مثلث قرار نمی‌گیرد.



۳ ۱ **۲** ۳ ۴ $\sqrt{۴۳}$ عددی گنگ است، پس $x\in R$ یا $x\in Q'$ است. با توجه به گزینه‌ها پس $x\in R$ (رد گزینهٔ ۳ و ۴)

اما $\sqrt{۴۳}$ بین $\sqrt{۴۹}$ و $\sqrt{۳۶}$ قرار دارد که جذر آنها برابر با اعداد صحیح ۷ و ۶ است. پس گزینهٔ «۲» درست است.

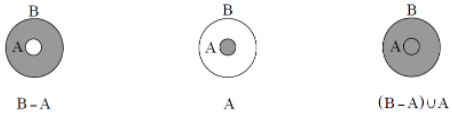
۴ ۱ **۲** ۳ ۴

و با توجه به نمودار ون:

$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A \quad (۱)$

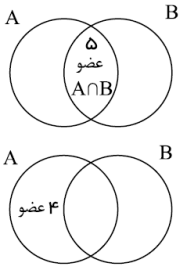
$A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing \quad (۲)$

$\Rightarrow [(A-B)]\cup(B-A)\cup(A\cap B)\xrightarrow{(۱),(۲)}\varnothing\cup(B-A)\cup A$



$\varnothing\cup(B-A)\cup A=\varnothing\cup B=B$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به نمودار ون، تعداد عضوهای هر قسمت را داخل آن قرار می‌دهیم.



درنتیجه، در قسمت $n(B-A)$ باید ۳ عضو داشته باشیم، چون:

$n(A\cup B)=۱۲$

روش دوم:

با توجّه به رابطه داریم:

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$

$\Rightarrow ۱۲=۴+n(B-A)+۵\Rightarrow n(B-A)=۳$

۶ ۱ ۲ **۳** ۴ مجموعه‌های متناظر با هر گزینه را می‌نویسیم:

گزینهٔ (۱): $\{۲,۳\}$

گزینهٔ (۲): $\{۱,۳,۵\}$

گزینهٔ (۳): $\{۹,۱۸,۲۷,\dots\}$

گزینهٔ (۴): $\{۳,۶,۹,\dots\}$

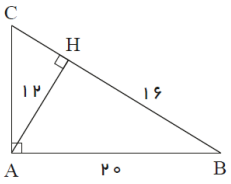
بنابراین فقط در گزینهٔ (۳) عدد ۳، عضو مجموعه داده شده نیست.

دبیرستان شایستگان نور
(دوره دوم)

۷ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس BH را به دست می‌آوریم:

$$BH^۲ = ۲۰^۲ - ۱۲^۲ \to BH^۲ = ۴۰۰ - ۱۴۴ = ۲۵۶ \to BH = \sqrt{۲۵۶} = ۱۶$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{B} = \hat{B} \\ \hat{H} = \hat{A} = ۹۰\end{matrix}\right\} \xrightarrow{zz} A\overset{\Delta}{H}B \sim A\overset{\Delta}{B}C$$



$$\frac{AH}{CA} = \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} \to \frac{۱۲}{CA} = \frac{۲۰}{CB} = \frac{۱۶}{۲۰}$$

$$\frac{۱۲}{CA} = \frac{۱۶}{۲۰} \to AC = \frac{۱۲ \times ۲۰}{۱۶} = \frac{۲۴۰}{۱۶} = ۱۵$$

۸ ۱ ۲ **۳** ۴ تعداد همهٔ حالت‌های ممکن در پرتاب دو تاس برابر است با: $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$ و تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۱۰ باشد برابر است با:

$$A = \{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow \ n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴** نکته: اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل r عضو باشد و شامل q عضو نباشد، از رابطهٔ ۲^{n-r-q} به‌دست می‌آید.

در این سؤال مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است، حال تعداد زیرمجموعه‌هایی که عضو a را داشته باشند، ولی عضو b را نداشته باشند. (شامل یک عضو a باشد و شامل یک عضو b نباشد):

$$۲^{۶-۱-۱} = ۲^۴ = ۱۶$$

۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا مجموعهٔ B را با اعضایش نمایش می‌دهیم:

$$B = \{۲x + ۳ \mid x \in \mathbb{N} \ , \ x < ۵\} = \{۵,۷,۹,۱۱\}$$

$$A \cap B = \{۱,۳,۵,۷,۹\} \cap \{۵,۷,۹,۱۱\} = \{۵,۷,۹\}$$

$A \cap B$ سه عضو دارد و زیرمجموعه‌های یک عضوی آن برابر ۳ تا است.

$$\{۵\} \ , \ \{۷\} \ , \ \{۹\}$$

۱۱ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\frac{۲۴}{۱۷} < \frac{x}{۱۲} \xrightarrow{\times ۱۲} \frac{۲۸۸}{۱۷} < x$$

حاصل $\frac{۲۸۸}{۱۷}$ را به دست می‌آوریم که برابر است با ۱۶٫۹۴ پس: $x > ۱۶٫۹۴$ و چون $x \in N$ است پس حداقل مقدار x برابر ۱۷ است.

۱۲ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به اینکه $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ در نتیجه گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح این سوال است.

۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴ نکته: جذر اعداد بین ۰ و ۱ از خودشان بزرگ‌تر است.

طبق نکتهٔ بالا جذر ۰٫۰۱۹ از خودش بزرگ‌تر است.

۱۴ **۱** ۲ ۳ ۴ روش هر دو درست است. چون در صورت سوال گفته که $\sqrt{۱۸a^۳b^۸}$ عدد حقیقی است و چون عبارت $b^۸$ نامنفی است پس قطعاً a باید نامنفی باشد، بنابراین وجود قدرمطلق تأثیری در جواب ندارد، بنابراین روش علی و مهدی درست است.

۱۵ **۱** ۲ ۳ ۴ چون دو مثلث متشابه‌اند، پس نسبت اضلاع متناظر آنها با هم برابر است.

پس داریم:

$$\frac{۸}{Y-۱} = \frac{۱۰}{۵} = \frac{۱۶}{X+۳}$$

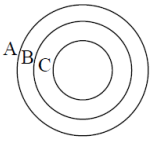
$$\frac{۸}{Y-۱} = \frac{۱۰}{۵} \Rightarrow ۱۰Y - ۱۰ = ۴۰ \Rightarrow ۱۰Y = ۵۰ \Rightarrow Y = ۵ \ , \ \frac{۱۰}{۵} = \frac{۱۶}{X+۳}$$

$$\Rightarrow ۱۰X + ۳۰ = ۸۰ \Rightarrow ۱۰X = ۵۰ \Rightarrow Y = ۵ \ , \ X = ۵$$

$X = Y = ۵$ پس باهم برابرند $\Leftarrow$

۱۶ ۱ ۲ **۳** ۴ چون عدد گزینهٔ ۱ بین صفر و یک هست پس هرچه توان بیشتر باشد کوچک‌تر است (رد گزینهٔ ۱) $\frac{۱}{۳۶} = ۶^{-۲}$ که با $-\frac{۲}{۶}$ برابر نیست (رد گزینهٔ ۲). جواب رادیکال هیچ‌گاه منفی نمی‌شود (رد گزینهٔ ۴) پس تنها گزینهٔ ۳ صحیح است.

۱۷ **۱** ۲ ۳ ۴ چون سه مجموعهٔ A و B, C به‌صورت $C \subseteq B \subseteq A$ است، پس نمودار ون آن به صورت زیر است:



$$\left.\begin{matrix}B \cup A = A \\ A \cup C = A\end{matrix}\right. \to A \cap A = A$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجّه به $۲^{۳x} \times ۲^{-۲y} = ۲$ داریم:

$$۲^{۳x} \times ۲^{-۲y} = ۲ \Rightarrow ۲^{۳x-۲y} = ۲ \Rightarrow ۳x - ۲y = ۱$$

همچنین از رابطهٔ $۳^{۴x} \div ۳^{۵y} = ۳$ داریم:

$$۳^{۵y} \div ۳^{۴x} = ۳^{۱} \Rightarrow ۳^{۵y-۴x} = ۳ \Rightarrow ۵y - ۴x = ۱$$

حال با حل دستگاه مربوط به دو معادله داریم:

$$\begin{matrix}\times ۴ \\ \times ۳\end{matrix} \begin{cases} ۳x - ۲y = ۱ \\ -۴x + ۵y = ۱ \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} ۱۲x - ۸y = ۴ \\ -۱۲x + ۱۵y = ۳ \end{cases}$$

$$y = ۱$$

$$\begin{matrix} ۳x - ۲y = ۱ \overset{y=۱}{\Rightarrow} ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱ \\ ۲x - y = ۲ \times ۱ - ۱ = ۱ \end{matrix}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت $۲x - ۴$ می‌تواند هم ۳ باشد و هم -۳ پس این دو را حل می‌کنیم:

$$\begin{matrix} ۲x - ۴ = ۳ \Rightarrow x = \frac{۷}{۲} \\ ۲x - ۴ = -۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \end{matrix} \Rightarrow \frac{۷}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ حالت‌های ممکن را برای a و b در نظر می‌گیریم $۱ \le b \le ۱۲ \;,\; b < ۱۳ \;,\; b \in N$

$\rightarrow b = ۱ \Rightarrow \frac{a}{b} < ۱$ صفر حالت

$\rightarrow b = ۲ \Rightarrow \frac{a}{b} < ۱$ $a = ۱$ یک حالت

$\rightarrow b = ۳ \Rightarrow \frac{a}{b} < ۱$ $a = ۱, ۲$ دو حالت

$\vdots$

$\rightarrow b = ۱۲ \Rightarrow \frac{a}{b} < ۱$ $a = ۱, ۲, ۳, ۴, \cdots, ۱۱$ ۱۱ حالت

$\rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $= ۱ + ۲ + \cdots + ۱۱ = \frac{۱۱(۱۲)}{۲} = ۶۶$

در میان این کسرهای نوشته شده، برخی از کسرها با هم مساوی هستند آنها را به‌دست می‌آوریم:

$\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۳}{۶} = \frac{۴}{۸} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۶}{۱۲}$ ۵ تا تکراری

$\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶} = \frac{۳}{۹} = \frac{۴}{۱۲}$ ۳ تا تکراری

$\frac{۱}{۴} = \frac{۲}{۸} = \frac{۳}{۱۲}$ ۲ تا تکراری

$\frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۱۰}$ ۱ تکراری

$\frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۱۲}$ ۱ تکراری

$\frac{۳}{۵} = \frac{۶}{۱۰}$ ۱ تکراری

$\frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۱۰}$ ۱ تکراری

$\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۶}{۹} = \frac{۸}{۱۲}$ ۳ تکراری

$\frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۱۰}$ ۱ تکراری

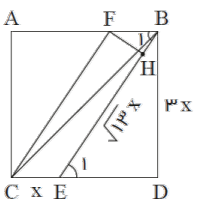
$\frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸} = \frac{۹}{۱۲}$ ۲ تکراری

$\frac{۵}{۶} = \frac{۱۰}{۱۲}$ ۱ تکراری

مجموعاً $۵ + ۳ + ۲ + ۱ + ۱ + ۳ + ۱ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱ = ۲۱$

$۶۶ - ۲۱ = ۴۵$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر $ED = x$ در نظر بگیریم آنگاه:



$$S_{BED} = ۲S_{BCE} \xrightarrow[\text{را } BD \text{ میگیریم}]{\text{ارتفاع هر دو مثلث}} \frac{ED \times BD}{۲} = ۲ \times \frac{CE \times BD}{۲} \rightarrow ED = ۲CE$$

$ED = ۲x$ و $\begin{cases} DC = ۳x \\ BD = DC = ۳x \end{cases} \Rightarrow BE^{۲} = (۲x)^{۲} + (۳x)^{۲} \rightarrow BE^{۲} = ۴x^{۲} + ۹x^{۲} = ۱۳x^{۲} \rightarrow BE = \sqrt{۱۳}x$

چون BE خط مورب می‌باشد. $\left.\begin{matrix} \hat{B}_۱ = \hat{E}_۱ \\ \hat{H} = \hat{D} \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{دو زاویه}]{zz} \overset{\Delta}{FBH} \approx \overset{\Delta}{BDE}$

$$\frac{FB}{BE} = \frac{FH}{BD} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۱۳}x} = \frac{۱}{۳x} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۱}{۳x} \Rightarrow ۳x = \sqrt{۱۳} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

طول ضلع مربع $= ۳x = ۳ \times \frac{\sqrt{۱۳}}{۳} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow$ ضلع مربع $= \sqrt{۱۳}$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$S = (\text{یک ضلع})^{۲} = (\sqrt{۱۳})^{۲} = ۱۳$

دبیرستان شایستگان نور
(دوره دوم)

۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴ بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم، یعنی ۸ تا آبی، ۶ تا سبز و ۹ تا زرد و ۹ تا قرمز برداریم. یاقوت بعدی یا قرمز یا زرد است که از آن رنگ ۱۰ تا برداشته می‌شود:

$$۶ + ۸ + ۹ + ۹ + ۱ = ۳۳$$

۲۳ ۱ **۲** ۳ ۴ چون شش‌ضلعی منتظم است تمام اضلاع برابر است، پس باید اضلاع مثلث اولیه به سه قسمت برابر تقسیم شوند. بنابراین داریم:

$$x = ۱۰ \div ۳ = \frac{۱۰}{۳} = ۳\frac{۱}{۳}$$

۲۴ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا باتوجه به رابطهٔ $\sqrt{a^۲} = |a|$ عبارت‌های زیررادیکال را خارج می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x^۲y} - \sqrt{x^۲y^۳}}{x\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x^۲}\sqrt{y} - \sqrt{x^۲y^۲}\sqrt{y}}{x\sqrt{y}} = \frac{|x|\sqrt{y} - |xy|\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

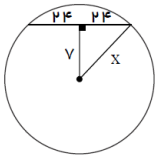
حال با توجه به اینکه $x < ۰ < y$ (x مقادیر منفی و y مقادیر مثبت دارد) آنها را بدون نماد قدر مطلق می‌نویسیم:

$$\frac{-x\sqrt{y} - (-(xy))\sqrt{y}}{x\sqrt{y}} = \frac{-x\sqrt{y} + xy\sqrt{y}}{x\sqrt{y}} = \frac{-x\sqrt{y}}{x\sqrt{y}} + \frac{xy\sqrt{y}}{x\sqrt{y}} = -۱ + y = y - ۱$$

۲۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{|a-b|}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -۱$$

۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ در دایره شعاع عمود بر وتر، منصف آن نیز هست، اکنون با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ایجاد شده شعاع را به دست می‌آوریم:



$۴۸ \div ۲ = ۲۴$

$x^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲ \Rightarrow x^۲ = ۵۷۶ + ۴۹ = ۶۲۵ \Rightarrow x = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵$ شعاع

قطر $= ۲ \times$ شعاع $= ۲ \times ۲۵ = ۵۰$

۲۷ ۱ **۲** ۳ ۴ کافی است نسبت اضلاع آنها را به دست آوریم:

$$\frac{\text{طول } ABCD}{\text{طول } MBCF} = \frac{\text{عرض } ABCD}{\text{عرض } MDCF}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۸}{۶} = \frac{۶}{FC} \Rightarrow \boxed{FC = ۲}$$

۲۸ ۱ **۲** ۳ ۴ $a < ۰$ و $ab > ۰$ در این صورت نتیجه می‌گیریم که $b < ۰$ است:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(a+b)^۲}}{a+b} = \frac{|a+b|}{a+b} \underset{a+b<۰}{=\!=\!=} \frac{-(a+b)}{a+b} = -۱$$

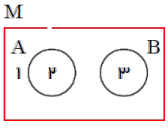
۲۹ ۱ **۲** ۳ ۴ با تقسیم فاصلهٔ زمین تا خورشید بر سرعت نور، مدت زمان طی کردن آن به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱۵ \times ۱۰^{۱۰}}{۳ \times ۱۰^۸} = x \Rightarrow ۵ \times ۱۰^۲ = ۵۰۰ \text{ ثانیه}$$

ثانیه	دقیقه
۶۰	۱
۵۰۰	x

$\Rightarrow ۸٫۳$ دقیقه

۳۰ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا به کمک نمودار ون ناحیه‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم:



گزینهٔ (۱): $\begin{cases} A = \{۲\} \\ B' = \{۱, ۲\} \end{cases} \Rightarrow A \subseteq B'$

همان‌طور که در نمودار ون کشیده شده مشخص است، گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند.

۳۱ **۱** ۲ ۳ ۴ بلندترین ارتفاع، ارتفاع دارد بر کوچکترین ضلع است به‌شکل زیر توجه کنید. با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث برای دو مثلث ABH و ACH داریم: